4EK314 Diskrétní modely
Příklady

Jan Fábry

Fakulta informatiky a statistiky
Katedra ekonometrie

fabry@vse.cz
https://janfabry.cz

Únor 2022, Praha

Cvičení 1

Příklad 1

Výrobní plánování s polotovary

Firma vyrábí produkty P_1, P_2 a P_3.
K výrobě 1 ks produktu P_1 jsou zapotřebí 3 kg materiálu.
K výrobě 1 ks produktu P_2 se používají 2 kg marteriálu a 1 ks produktu P_1.
K výrobě 1 ks produktu P_3 jsou zapotřebí 2 kg materiálu, 2 ks produktu P_1 a 1 ks produktu P_2.
K dispozici je 1000 kg materiálu.
Produkty P_1 a P_2, které se používají jako polotovary, lze také prodávat samostatně.
Ceny produktů P_1, P_2 a P_3 jsou 5, 10 a 30 €. Cílem je maximalizovat celkové tržby z prodaných výrobků.

Formulujte matematický model úlohy, výpočet proveďte v MPL for Windows.

Příklad 2
Řezná úloha

Firma vyrábí ploty z dřevěných latí. K výrobě plotů v konkrétní zakázce firma potřebuje 1200 latí o délce 80 cm, 3100 latí dlouhých 50 cm a 2100 latí o délce 30 cm. Ve skladu jsou k dispozici pouze standardní latě dlouhé 200 cm. Máte splnit zakázku a přitom použít minimální počet standardních latí.

Formulujte matematický model úlohy, výpočet proveďte v MPL for Windows.

Příklad 3

Úloha batohu

Společnost zvažuje investici do 5 projektů charakterizovaných náklady a výnosy. Rozpočet 50 000 € má být použitý tak, aby investice maximalizovala celkový výnos.

	P1	P2	P3	P4	P5
Naklady	12 000	10 000	15 000	18 000	16 000
Vynosy	20 000	18 000	22 000	26 000	21 000

Příklad 4

Úloha perfektního párování

Deset studentů jede na školní výlet. Protože je nutné je rozdělit do dvoulůžkových pokojů, byli vyzváni, aby vyjádřili své preference ohledně budoucího spolubydlícího (viz tabulka, 0-min, 10-max). Pro $i < j$ vyjadřuje student i hodnotou c_{ij} svoji preferenci bydlet v pokoji se studentem j, pro $i > j$ vyjadřuje student j hodnotou c_{ij} svoji preferenci bydlet v pokoji se studentem i. Rozdělte studenty do pokojů tak, aby třída jako celek byla maximálně spokojená.

Příklad 4

Úloha perfektního párování

Pref	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	7	6	2	4	7	4	1	8	3
2	1	0	3	1	10	5	2	9	4	2
3	10	1	0	5	6	1	8	2	7	4
4	1	8	4	0	10	7	5	4	2	7
5	8	7	3	5	0	2	1	5	2	9
6	2	2	3	7	8	0	8	2	1	5
7	1	7	6	1	7	7	0	8	1	5
8	6	8	1	1	10	8	1	0	4	7
9	4	1	2	2	8	1	7	5	0	2
10	1	5	4	3	9	7	1	4	6	0

Příklad 5

Lineární přiřazovací problém

Organizuje se štafetový závod pro pětičlenné týmy. Každý člen týmu závodí v jedné disciplíně a vy chcete sestavit nejsilnější možný tým. V tabulce jsou pro každého z 8 kandidátů na místo ve štafetě uvedeny jeho nejlepší výkony v sezóně (v minutách).

Cas	Beh	Plavani	Kolo	Brusle	Bezky
Mike	75	25	202	130	165
Jack	87	24	198	127	173
Peter	68	19	195	121	164
Sean	91	20	207	122	182
Paul	80	28	215	125	172
Simon	78	22	197	125	180
Tom	75	25	205	127	178
David	81	23	211	131	165

Příklad 6

Úzkoprofilový přiřazovací problém

Projekt je tvořen 5 nezávislými částmi. Ve firmě je 5 oddělení, která jsou schopná zvládnout jednotlivé části. Na základě historických údajů jsou vypočítány průměrné doby (ve dnech), během nichž jsou oddělení schopna dokončit podobné úlohy (viz tabulka). Označení N.A. znamená, že oddělení nikdy v minulosti podobnou úlohu neřešilo. Společnost chce dokončit celý projekt co nejdříve.

Cas	Cast1	Cast2	Cast3	Cast4	Cast5
Odd1	25	15	N.A.	17	25
Odd2	22	N.A.	22	20	22
Odd3	20	18	25	16	23
Odd4	N.A.	20	30	21	28
Odd5	27	19	27	18	N.A.

Příklad 7

Kvadratický přiřazovací problém

Firma má v úmyslu vybudovat 5 skladů v 5 městech. V první tabulce jsou dány vzdálenosti (v km) mezi městy, ve druhé tabulce počty jízd, které se musí mezi sklady uskutečnit během jednoho měsíce. Cílem je rozhodnout, který sklad ve kterém městě bude zřízen, aby byly minimalizovány celkové přepravní náklady.

Příklad 7

Kvadratický přiřazovací problém

Vzdal	Mesto1	Mesto2	Mesto3	Mesto4	Mesto5
Mesto1	0	50	60	130	100
Mesto2	50	0	70	150	120
Mesto3	60	70	0	80	40
Mesto4	130	150	80	0	50
Mesto5	100	120	40	50	0

Jizdy	Sklad1	Sklad2	Sklad3	Sklad4	Sklad5
Sklad1	0	10	15	12	8
Sklad2	9	0	18	16	10
Sklad3	20	8	0	10	12
Sklad4	10	15	11	0	22
Sklad5	17	12	9	11	0

Příklad 8

Úloha optimálního rozmístění zařízení

Společnost může využít 7 potenciálních skladů, z nichž bude přepravovat materiál do svých 5 poboček. V tabulce jsou dány velikosti měsíčních požadavků poboček a měsíční kapacity skladů (v tis. tun). Pokud je daný sklad využitý, společnost musí platit za jeho měsíční pronájem uvedené částky (v tis. €). Dále jsou účtovány jednotkové přepravní náklady (v € za tunu) pro každou dvojici skladu a pobočky. Rozhodněte, které sklady pronajmout a jaké množství materiálu přepravovat mezi pronajatými sklady a pobočkami, aby celkové měsíční náklady byly minimální.

Příklad 8

Úloha optimálního rozmístění zařízení

Rozm	P1	P2	P3	P4	P5	Kap	Najem
Sklad1	10	15	20	12	8	20	10
Sklad2	7	10	15	22	13	25	12
Sklad3	20	13	10	11	9	15	8
Sklad4	15	12	21	18	16	18	9
Sklad5	11	22	12	10	15	22	11
Sklad6	9	13	11	18	22	30	13
Sklad7	18	10	15	7	9	23	11
Poz	25	22	17	22	15		

Příklad 9

Rozšířená úloha batohu

Klientům společnosti je nutné přepravit produkty za použití identických kontejnerů. V tabulce je pro každý typ produktu dána jeho hmotnost (v kg) a počet, který se má přepravit. Nosnost kontejneru je 500 kg. Cílem je minimalizovat počet použitých kontejnerů.

Kontejnery	Hmotnost	Pocet
Produkt1	20	13
Produkt2	22	15
Produkt3	18	25
Produkt4	15	30
Produkt5	21	18
Produkt6	16	35

Příklad 10

Úloha hledání maximálního toku

Najděte maximální hodnotu toku z uzlu 1 do uzlu 6 v grafu daném následující tabulkou.

Hrana	Kapacita	Hrana	Kapacita
(1,2)	10	(3,5)	7
(1,3)	10	(3,6)	5
(1,4)	12	(4,3)	3
(2,5)	11	(4,6)	9
(3,4)	3	(5,6)	18

Příklad 11

Úloha hledání toku s minimálními náklady

Najděte tok (z 1 do 6) o velikosti 25 s minimálními celkovými náklady. V tabulce je pro každou hranu dána její kapacita a jednotkové náklady spojené s tokem.

Hrana	Kapacita	Naklady	Hrana	Kapacita	Naklady
(1,2)	10	5	(3,5)	7	6
(1,3)	10	10	(3,6)	5	9
(1,4)	12	20	(4,3)	3	12
(2,5)	11	11	(4,6)	9	17
(3,4)	3	12	(5,6)	18	8

Příklad 12

Úloha hledání maximálního toku s limitovanými náklady

Nechť je dán rozpočet 700 €. Najděte maximální hodnotu toku z 1 do 6 respektující toto omezení.

Hrana	Kapacita	Naklady	Hrana	Kapacita	Naklady
(1,2)	10	5	(3,5)	7	6
(1,3)	10	10	(3,6)	5	9
(1,4)	12	20	(4,3)	3	12
(2,5)	11	11	(4,6)	9	17
(3,4)	3	12	(5,6)	18	8

Příklad 13

Přepravní úloha (Transshipment Problem)

Firma potřebuje přepravit prázdné kontejnery ze zdrojových míst do míst určení. V grafu představují uzly 1 a 3 zdrojová místa nabízející 15 a 10 kontejnerů, uzly 4 a 6 jsou místa určení požadující 5 a 20 kontejnerů. V tabulce je pro každou hranu dána její kapacita a náklady spojené s přepravou jednoho kontejneru. Cílem je minimalizovat celkové přepravní náklady.

Hrana	Kapacita	Naklady	Hrana	Kapacita	Naklady
(1,2)	10	5	(3,5)	7	6
(1,3)	10	10	(3,6)	5	9
(1,4)	12	20	(4,3)	3	12
(2,5)	11	11	(4,6)	9	17
(3,4)	3	12	(5,6)	18	8

Příklad 14

Minimální kostra grafu

Společnost má v městském parku instalovat 6 elektronických informačních tabulí, které budou vzájemně propojeny kabelem vedoucím pod chodníky. V tabulce jsou dány vzdálenosti mezi tabulemi (v desítkách metrů). Nevede-li mezi tabulemi chodník, je v tabulce uvedena prohibitivní sazba 100. Cílem je minimalizovat náklady jak na výkopové a stavební práce, tak na samotný kabel.

Tabule	1	2	3	4	5	6
1	0	6	5	100	100	100
2	6	0	7	2	4	100
3	5	7	0	6	100	8
4	100	2	6	0	3	4
5	100	4	100	3	0	5
6	100	100	8	4	5	0

Příklad 15

Minimální Steinerův strom

Tři uživatelé (v tabulce označeni uzly 2, 3 a 4) mají být připojeni na vysílač signálu (uzel 1) buď přímo nebo přes dvě ústředny (uzly 5 a 6). V tabulce jsou uvedeny náklady (v tis. € za měsíc) na všechna možná spojení. Využití jednotlivých ústředen je zpoplatněno 30 a 20 tis. € za měsíc. Najděte optimální spojení.

Hrana	Naklady	Hrana	Naklady
(2,1)	15	(4,5)	9
(2,5)	3	(4,6)	6
(3,1)	18	(5,1)	7
(3,5)	4	(6,1)	12
(3,6)	7		

Příklad 16

Úloha obchodního cestujícího

Obchodní zástupce pivovaru ve Velvarech musí postupně navštívit 7 restaurací v 7 městech. V tabulce jsou uvedeny vzdálenosti (v km) odpovídající přímým spojením měst (silnicemi). Pomlčka odpovídá situaci, kdy města nejsou spojena silnicí. Cílem je navštívit všechny restaurace a ujet přitom minimální vzdálenost.

	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	-	13	10	-	12	9
Kralupy	8	0	6	16	-	-	-	4
Libcice	-	6	0	-	-	-	-	-
Slany	13	16	-	0	7	-	-	-
Zlonice	10	-	-	7	0	7	13	-
Vrany	-	-	-	-	7	0	15	-
Briza	12	-	-	-	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	-	-	-	-	13	0

Příklad 16

Úloha obchodního cestujícího

Následující tabulka obsahuje vzdálenosti mezi dvojicemi měst.

Vzdalenost	Velv	Kra	Lib	Sla	Zlo	Vra	Bri	Velt
Velvary	0	8	14	13	10	17	12	9
Kralupy	8	0	6	16	18	25	17	4
Libcice	14	6	0	22	24	31	23	10
Slany	13	16	22	0	7	14	20	20
Zlonice	10	18	24	7	0	7	13	19
Vrany	17	25	31	14	7	0	15	26
Briza	12	17	23	20	13	15	0	13
Veltrusy	9	4	10	20	19	26	13	0

Příklad 17

Rozvozní úloha

Obchodní zástupce pivovaru (viz příklad 16) uzavřel se všemi restauracemi výhodné smlouvy. V tabulce jsou uvedeny počty sudů, které budou restaurace pravidelně odebírat. Pro rozvoz bude použito vozidlo s kapacitou 50 sudů. Cílem je uspokojit všechny požadavky s minimální délkou všech tras.

	Pozadavek
Velvary	0
Kralupy	18
Libcice	10
Slany	15
Zlonice	12
Vrany	10
Briza	8
Veltrusy	11

Příklad 18

Neorientovaná úloha čínského listonoše

O halloweenském večeru děti chtějí navštívit všechny domy v přilehlém okolí (viz obrázek). Tabulka obsahuje délky ulic (v metrech), kterými děti musí projít. Naplánujte jim trasu tak, aby je co nejméně bolely nohy.

Cvičení 6

Příklad 18

Neorientovaná úloha čínského listonoše

Hrana	Delka	Hrana	Delka
(1,2)	210	(6,7)	80
(1,9)	160	(6,11)	150
(2,3)	140	(7,8)	80
(2,5)	80	(7,9)	110
(3,4)	40	(9,10)	160
(3,5)	210	(10,11)	130
(4,6)	310	(10,12)	190
(5,6)	70	(11,12)	150

Příklad 18

Neorientovaná úloha čínského listonoše

Řešení

Příklad 19

Neorientovaná úloha čínského listonoše

Vozidlo Street View musí zmapovat pozice v několika brněnských ulicích (viz obrázek).V tabulce jsou uvedeny délky ulic (v metrech). Naplánujte trasu s minimální délkou.

Cvičení 6

Příklad 19

Neorientovaná úloha čínského listonoše

Delka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	91	-	226	111	-	-	-	-	-
2	91	-	90	158	186	-	-	-	-	-
3	-	90	-	-	451	68	-	-	-	158
4	226	158	-	-	-	-	189	-	-	-
5	111	186	451	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	68	-	-	-	56	-	157	-
7	-	-	-	189	-	56	-	170	-	-
8	-	-	-	-	-	-	170	-	91	358
9	-	-	-	-	-	157	-	91	-	72
10	-	-	158	-	-	-	-	358	72	-

Příklad 19

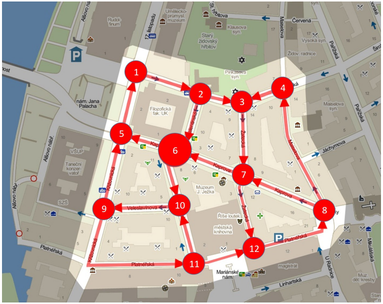
Neorientovaná úloha čínského listonoše

Řešení

Příklad 20

Orientovaná úloha čínského listonoše

Vozidlo Městských služeb musí svézt směsný odpad domácností z jednosměrných ulic v části pražského obvodu (viz obrázek). Tabulka obsahuje délky ulic (v metrech). Cílem je minimalizovat celkovou délku trasy vozidla.



Cvičení 6

Příklad 20

Orientovaná úloha čínského listonoše

Hrana	Delka	Hrana	Delka
(1,2)	82	(7,12)	93
(2,3)	53	(8,4)	162
(2,6)	78	(8,7)	111
(3,7)	93	(9,5)	93
(4,3)	56	(9,11)	200
(5,1)	78	(10,9)	96
(6,5)	80	(11,10)	73
(6,10)	76	(11,12)	76
(7,6)	78	(12,8)	111

Příklad 20

Orientovaná úloha čínského listonoše

Řešení